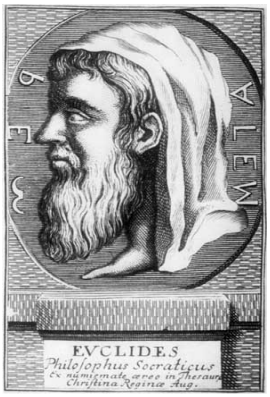
CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „EUCLID”

Focşani, 19 noiembrie 2016

Clasa a V – a



SUBIECTUL I

a) Aflați numărul natural x din egalitatea

$$2^7 : 2^3 \cdot (x : 5 : 2^2 - 3^{17} : 81^4) - 4^2 = 2^4 .$$

b) Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ ştiind că $a \cdot b + a + b = 35$.

c) Aflați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 2016 dau câtul 3.

SUBIECTUL II

a) Aflați restul împărțirii numărului $A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2017 + 6012$ la 1729.

b) Numărul 20162018 este termen al şirul de numere naturale 1, 8, 15, 22, 29, ... ? Justificați răspunsul.

c) Scrieți numărul $C = 29^{n+1} \cdot 53^n$ ca suma a două pătrate perfecte, pentru orice număr natural n.

SUBIECTUL III

a) Numărul N este scris cu 666 cifre de 3, iar numărul P este scris cu 333 cifre de 6. Să se calculeze $N \cdot P$.

b) La un concurs de matematică dintr-o şcoală au participat 40 de elevi. Ştiind că 25 de elevi au rezolvat prima problemă, 30 de elevi au rezolvat a doua problemă, 35 de elevi au rezolvat a treia problemă iar 33 de elevi au rezolvat a patra problemă, aflați numărul minim de elevi care au rezolvat toate cele patru probleme la concurs.

Timp de lucru: 2 ore

Se acordă 1 p din oficiu pentru fiecare subiect

Subiecte propuse de:

Profesor Gabriela LEFTER, Şcoala Gimnazială „Grigore Moisil” Galați

Informații despre concurs găsiți la *https://concurseuclidfocsani.wordpress.com*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „EUCLID”
Focşani, 19 noiembrie 2016



Clasa a V – a

Soluţii şi barem de corectare

Notă: *Fiecare dintre subiectele I, II şi III primeşte câte 1 p din oficiu*

SUBIECTUL I

a) Aflați numărul natural x din egalitatea
$$2^7 : 2^3 \cdot (x : 5 : 2^2 - 3^{17} : 81^4) - 4^2 = 2^4 .$$
b) Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{ab}$ ştiind că $a \cdot b + a + b = 35$.
c) Aflați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 2016 dau câtul 3.

SOLUȚIE

a) $2^4 \cdot (x : 5 : 4 - 3^{17} : 3^{16}) = 32$ ... 1p

$x : 5 : 4 - 3 = 2$ ... 1p

$x = 100$ ... 1p

b) $(b+1) \cdot (a+1) = 36$ ... 1p

$a \neq 0$, $a+1 \leq 10$, $b+1 \leq 10$ şi $36 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 = 9 \cdot 4$ ... 1p

$\overline{ab} \in \{83, 55, 38\}$ ... 1p

c) $x = 2016 \cdot 3 + r$, $0 \leq r \leq 2015$

Adunând relațiile
$$x_0 = 2016 \cdot 3 + 0$$
$$x_1 = 2016 \cdot 3 + 1$$
$$x_2 = 2016 \cdot 3 + 2$$
$$\vdots$$
$$x_{2015} = 2016 \cdot 3 + 2015$$
... 1p

se obține
$$S = 2016 \cdot 3 \cdot 2016 + 1 + 2 + \ldots + 2015$$ ... 1p
$$S = 1008 \cdot (6 \cdot 2016 + 2015) = 14223888$$ ... 1p

SUBIECTUL II

a) Aflați restul împărțirii numărului $A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2017 + 6012$ la 1729.

b) Numărul 20162018 este termen al şirul de numere naturale 1, 8, 15, 22, 29, ... ? Justificați răspunsul.

c) Scrieți numărul $C = 29^{n+1} \cdot 53^n$ ca suma a două pătrate perfecte, pentru orice număr natural n.

SOLUȚIE

a) $A = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1727 \cdot 1729 \cdot 1731 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2017 + 1729 \cdot 3 + 825$ ... 1p

$A = 1729 \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1727 \cdot 1731 \cdot \ldots \cdot 2015 \cdot 2017 + 3) + 825$ ... 1p

Cum $A = 1729 \cdot C + R$, $R < 1729$, rezultă că $R = 825$ ... 1p

b) Termenii şirului dat sunt

$T_1 = 1 = 1 + 7 \cdot 0$, $T_2 = 8 = 1 + 7 \cdot 1$, $T_3 = 15 = 1 + 7 \cdot 2$, ... 1p

adică sunt numere care dau restul 1 la împărțirea prin 7. ... 1p

$20162018 : 7 = 2880288$ rest 2 ... 1p

20162018 nu este termen al şirului dat ... 1p

c) Pentru $n = 2k$ (n = număr par),

$$\begin{aligned} C &= 29^{2k+1} \cdot 53^{2k} \\ &= 29 \cdot (29^k \cdot 53^k)^2 \\ &= (2^2 + 5^2) \cdot (29^k \cdot 53^k)^2 \\ &= (2 \cdot 29^k \cdot 53^k)^2 + (5 \cdot 29^k \cdot 53^k)^2 \end{aligned}$$ ... 1p

Pentru $n = 2k + 1$ (n = număr par),

$$\begin{aligned} C &= 29^{2k+2} \cdot 53^{2k+1} \\ &= 53 \cdot (53^k)^2 \cdot (29^{k+1})^2 \\ &= (2^2 + 7^2) \cdot (53^k \cdot 29^{k+1})^2 \\ &= (2 \cdot 53^k \cdot 29^{k+1})^2 + (7 \cdot 53^k \cdot 29^{k+1})^2 \end{aligned}$$ ... 1p

SUBIECTUL III

a) Numărul N este scris cu 666 cifre de 3, iar numărul P este scris cu 333 cifre de 6. Să se calculeze $N \cdot P$.

b) La un concurs de matematică dintr-o şcoală au participat 40 de elevi. Ştiind că 25 de elevi au rezolvat prima problemă, 30 de elevi au rezolvat a doua problemă, 35 de elevi au rezolvat a treia problemă iar 33 de elevi au rezolvat a patra problemă, aflați numărul minim de elevi care au rezolvat toate cele patru probleme la concurs.

SOLUȚIE

a) Numerele sunt

$$N \cdot P = \underbrace{3333\ldots333}_{666\,ori} \cdot \underbrace{6666\ldots666}_{333\,ori}$$

$$= \underbrace{9999\ldots999}_{666\,ori} \cdot \underbrace{2222\ldots222}_{333\,ori} \quad \ldots \text{ 2p}$$

$$N \cdot P = (10^{666} - 1) \cdot \underbrace{2222\ldots222}_{333\,ori}$$

$$= \underbrace{2222\ldots222}_{333\,ori}\underbrace{000\ldots0000}_{666\,ori} - \underbrace{2222\ldots222}_{333\,ori} \quad \ldots \text{ 2p}$$

$$N \cdot P = \underbrace{2222\ldots222}_{332\,ori}1\underbrace{999\ldots999}_{333\,ori}\underbrace{777\ldots777}_{332\,ori}8 \quad \ldots \text{ 2p}$$

b) Presupunem că niciun elev nu a rezolvat toate cele patru probleme, deci fiecare elev a rezolvat cel mult trei probleme.

Dacă fiecare elev a rezolvat câte trei probleme, atunci cei 40 de elevi au rezolvat un total de $40 \cdot 3 = 120$ probleme. ... 1p

Numărul de probleme rezolvate de cei 40 de elevi este

$$25 + 30 + 35 + 33 = 123 \quad \ldots \text{ 1p}$$

Deci avem în plus 3 probleme rezolvate, adică cel puțin 3 elevi au rezolvat toate cele patru probleme. ... 1p